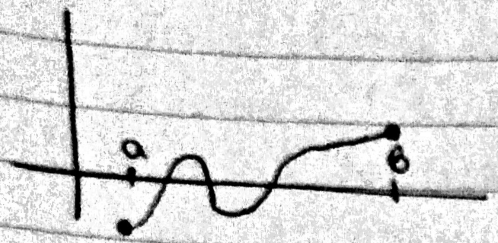
23/11/2016

<u>Θεώρημα (Bolzano)</u>

Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(a) < 0 < f(b)$ (ή $f(b) < 0 < f(a)$) Τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$



<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $A = \{x \in (a,b) : f(t) < 0$ για καθε t με $a<t<x\}$

<u>1º βήμα</u> $A \neq \emptyset$

<u>Απ</u> Εφόσον $f(a) < 0$ $\exists\, \delta_1 > 0$ ώστε $f(t) < 0$ $\forall\, t \in [a, a+\delta_1)$

Τότε $a + \delta_1 \in A$ άρα $A \neq \emptyset$

2º βήμα Το A είναι άνω φραγμένο

<u>Απ</u> Προφανώς το b είναι άνω φράγμα του A

Εφόσον το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο, από το αξίωμα της πληρότητας έχει supremum

Θέτουμε $\xi = \sup A$

3º βήμα $a < \xi < b$

Εφόσον $(a, a+\delta_1) \subseteq A$

(βλ. 1º βήμα)

$\xi = \sup A \geq a + \delta_1 > a$

Εφόσον $f(\beta)>0$ και η f είναι συνεχής στο β
$\exists\, \delta_2>0$ ώστε $f(t)>0 \;\forall t \in (\beta-\delta_2, \beta]$ (1)

Το $\beta-\delta_2$ θα είναι άνω φράγμα του A
Αν αυτό δεν ίσχυε θα υπήρχε $x\in A$ με $x>\beta-\delta_2$
Τότε $f(t)>0$ (εφόσον $x\in A$) και $f(t)<0$ από την (1) άτοπο
Άρα $\xi=\sup A \le \beta-\delta_2 < \beta$

4ο βήμα $f(\xi)=0$
Απόδειξη Αρκεί να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις
$f(\xi)<0$ και $f(\xi)>0$

α) Υποθέτουμε ότι $f(\xi)<0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο ξ $\exists\, \delta_3>0$ ώστε $f(t)<0 \;\forall t\in(\xi-\delta_3, \xi+\delta_3)$

Εφόσον $\xi=\sup A$ $\exists x\in A$ με $x>\xi-\delta_3$
Έτσι $f(t)<0 \;\forall t\in(a,x)$
Άρα $f(t)<0 \;\forall t\in(a,\xi+\delta_3)$ συνεπώς $\xi+\delta_3\in A$ άτοπο διότι $\xi=\sup A$

β) Υποθέτουμε ότι $f(\xi)>0$
Τότε λόγω της συνέχειας της f στο ξ $\exists\, \delta_4>0$ ώστε $f(t)>0 \;\forall t\in(\xi-\delta_4, \xi+\delta_4)$ (2)
Επιλέγοντας $x\in A$ με $x>\xi-\delta_4$
για τυχόν t με $\xi-\delta_4<t<x$

Θα έχουμε $f(t)>0$ (από τη (2)) και $f(t)<0$ (εφόσον $x\in A$) άτοπο
Επομένως $f(\xi)=0$.

Δευτερη αποδειξη (με χρηση ακολουθιων)

Υποθετουμε (προς απαγωγη σε ατοπο) οτι $f(x)\neq 0 \ \forall x\in(\alpha,\beta)$

$\alpha \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \beta$

Θετουμε $\alpha_1=\alpha \quad \beta_1=\beta$

i) Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$

Θετουμε $\alpha_2=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \beta_2=\beta$

ii) Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0$

Θετουμε $\alpha_2=\alpha \quad \beta_2=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\alpha_1\leq\alpha_2<\beta_2\leq\beta_1$

$f(\alpha_2)<0<f(\beta_2)$

$\beta_2-\alpha_2=\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}$

Επαγωγικά μπορουμε να κατασκευάσουμε δυο ακολουθιες (α_ν) (β_ν)

(i) $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$

(ii) $\alpha_\nu\leq\alpha_{\nu+1}<\beta_{\nu+1}\leq\beta_\nu$

(iii) $f(\alpha_\nu)<0<f(\beta_\nu)$

(iv) $\beta_\nu-\alpha_\nu=\frac{\beta-\alpha}{2^{\nu-1}}$

Η (α_ν) ειναι αυξουσα και φραγμενη ανω (απο το β) αρα συγκλινουσα. Θετουμε $\xi=\lim\alpha_\nu$ ισχυει $\alpha\leq\xi\leq\beta$

$\beta_\nu=\underset{\downarrow 0}{(\beta_\nu-\alpha_\nu)}+\underset{\downarrow \xi}{\alpha_\nu}\to\xi$

$a_n \to \xi$ $\}$ f συνεχής $f(a_n) \to f(\xi)$
$b_n \to \xi$ $\}$ στο ξ $f(b_n) \to f(\xi)$

Εφόσον $f(a_n) < 0$ $\forall n$ προκύπτει $f(\xi) \leq 0$

Εφόσον $f(b_n) > 0$ $\forall n$ προκύπτει ότι $f(\xi) \geq 0$
Επομένως $f(\xi) = 0$ άτοπο

Επομένως $\exists\, x \in (a, b)$ με $f(x) = 0$

<u>Πόρισμα</u> (Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών)
Έστω $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

a) Αν $f(a) < y < f(b)$ τότε
$\exists\, \xi \in (a, b)$ $f(\xi) = y$

b) Αν $f(b) < y < f(a)$ τότε
$\exists\, \xi \in (a, b)$ $f(\xi) = y$

<u>Απόδειξη</u>

a) Ορίζουμε $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ $g(x) = f(x) - y$
g συνεχής $g(a) < 0 < g(b)$

Από Θ. Bolzano $\exists\, \xi \in (a, b)$ $g(\xi) = 0$ δηλ. $f(x) = y$

b) Ορίζουμε $g\ [a, b] \to \mathbb{R}$ $g(x) = y - f(x)$ g συνεχής
$g(a) < 0 < g(b)$
Άρα από Θ. Bolzano $\exists\, \xi \in (a, b)$
$g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = y$

Πόρισμα

Αν I διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε το $f(I)$ είναι διάστημα

Αποδ.

Αν f σταθερή $f(x)=c$ $\forall x \in I$ $f(I)=\{c\}$

Αν η f δεν είναι σταθερή και $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$

Τότε $y_1 = f(a)$ και $y_2 = f(b)$ για κάποια $a, b \in I$

Αν $y_1 < y < y_2$

Απο το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει κάποιο x στο διάστημα με άκρα τα a, b ώστε $f(x)=y$

Αρα $y = f(x) \in f(I)$

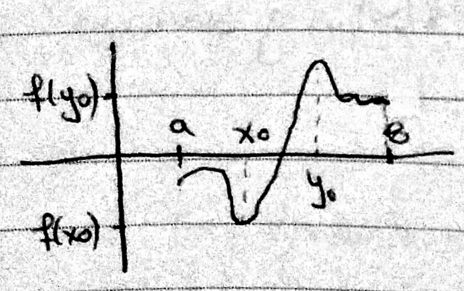
Επομένως $f(I)$ διάστημα

Παρατήρηση

Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε το $f([a,b])$ είναι διάστημα και εφόσον η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή αν $x_0 \in [a,b]$ με $f(x_0) = \min\{f(x) \; x \in [a,b]\}$

$y_0 \in [a,b]$ με $f(y_0) = \max\{f(x) \; x \in [a,b]\}$

Τότε $f([a,b]) = [f(x_0), f(y_0)]$



Παρ.

Αν $f:[a,b] \to [a,b]$ συνεχής τότε $\exists\, \xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \xi$

Απ

Αν $f(a)=a$ θέτουμε $\xi = a$ διαφορετικά θα ισχυε $f(a)>a$

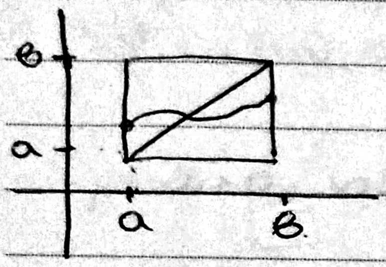
Αν $f(b)=b$ θέτουμε $\xi = b$ διαφορετικά θα ισχυε $f(b)<b$

Ετσι αν $f(a)>a$ και $f(b)<b$

Ορίζοντας $g\ [a,b] \to \mathbb{R}$ εχουμε g συνεχής $g(a)>0>g(b)$

$g(x) = f(x) - x$

Αρα απο Θ. Bolzano $\exists\, \xi \in (a,b)$ ώστε $g(\xi)=0$ δηλ $f(\xi)=\xi$



Λήμμα

Αν I διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση και $a<b<\gamma$ τρια σημεια του I

Τότε είτε $f(a) < f(b) < f(\gamma)$

ή $f(a) > f(b) > f(\gamma)$.

Αποδ. Εφόσον η f είναι 1-1 τα $f(a), f(b), f(\gamma)$ είναι διαφορετικά ανα δυο. Αρκεί να αποκλείσαμε τις περιπτώσεις (i) $f(b) < f(a) < f(\gamma)$

(ii) $f(b) < f(\gamma) < f(a)$

(iii) $f(a) < f(\gamma) < f(b)$

(iv) $f(\gamma) < f(a)$ $f(b)$

Δείχνουμε ότι αποκλείεται η (i) (ομοίως για τις άλλες τρεις)

Εφόσον $f(\beta) < f(a) < f(\gamma)$ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[\beta, \gamma]$ προκύπτει ότι υπάρχει $x \in (\beta, \gamma)$ ώστε $f(x) = f(a)$

Όμως $a < \beta < x$ άρα $a \neq x$ άτοπο διότι η f είναι 1-1

Λήμμα

Αν I διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 και $a < \beta < \gamma < \delta$ στο I τότε είτε $f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(\delta)$
ή $f(a) > f(\beta) > f(\gamma) > f(\delta)$

Απ.

Αφού f 1-1 έχουμε $f(\beta) \neq f(\gamma)$ και έχουμε δύο περιπτώσεις

a) $f(\beta) < f(\gamma)$

Από το προηγούμενο λήμμα για την τριάδα $a < \beta < \gamma$ προκύπτει $f(a) < f(\beta) < f(\gamma)$
Από το προηγούμενο λήμμα για την τριάδα $\beta < \gamma < \delta$ προκύπτει ότι $f(\beta) < f(\gamma) < f(\delta)$
Άρα $f(a) < f(\beta) < f(\gamma) < f(\delta)$

β) $f(\beta) > f(\gamma)$
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $f(a) > f(\beta) > f(\gamma) > f(\delta)$

Θεώρημα

Αν I διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

Απόδειξη

Έστω $a < \beta$ δύο τυχαία σημεία του I τότε $f(a) \neq f(\beta)$ (αφού f 1-1) άρα είτε $f(a) < f(\beta)$ ή $f(a) > f(\beta)$

1η περίπτωση

$f(a) < f(b)$

Θα δ.ο η f είναι γνησίως αύξουσα

Έστω $x<y$ δυο τυχαία σημεία του I και θα δ.ο.

$f(x) < f(y)$

α) Αν $x=a$ και $y=b$ τότε $f(x) < f(y)$

β) Αν ένα απο τα x,y είναι ίσα με α ή με β

Αν $x=a<y<b$ απο το πρώτο λήμμα προκύπτει

$f(x) = f(a) < f(y) < f(b)$

Αν $x=a<b<y$ πάλι απο το πρώτο λήμμα προκύπτει

$f(x)=f(a) < f(b) < f(y)$

Ομοίως αν κάποιο απο τα x,y είναι ίσο με β

γ) Αν κανένα απο τα x,y δεν είναι ίσο με κάποιο απο τα a,b. Το συμπέρασμα έπεται με χρήση του δευτέρου λήμματος άρα η διάταξη των τεσσάρων σημείων διατηρείται μετά την εφαρμογή της f (εφόσον $f(a)<f(b)$) Άρα $f(x) < f(y)$

2η περίπτωση $f(a) > f(b)$

Με τα ίδια επιχειρήματα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

Ασκήσεις

$$a_n = \frac{M^n}{n!}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{M^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{M^n}{n!}} = \frac{M^{n+1} \cdot n!}{M^n (n+1)!} = \frac{M}{n+1} \to 0 < 1$$

άρα $a_n \to 0$

$$b_n = \frac{5^n + n!}{11^n + 2n!} = \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{\frac{5^n}{n!}} + 1}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{11^n}{n!}} + 2} \to \frac{1}{2}$$

$\gamma_n = \sqrt[n]{n!}$ Θα δ.ο. $\gamma_n \to +\infty$ με χρήση του ορισμού

Έστω $M > 0$
(και αναζητάμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\gamma_n > M$ $\forall n \geq n_0$)

$$\gamma_n > M \iff \sqrt[n]{n!} > M$$
$$\iff n! > M^n$$
$$\iff \frac{M^n}{n!} < 1$$

Εφόσον (όπως είδαμε νωρίτερα) $\frac{M^n}{n!} \to 0$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_0$
$$\frac{M^n}{n!} < 1$$

Επομένως

$\iff \sqrt{n!} > M$

$\gamma_n \to +\infty$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$
$$\to \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2$$

Εφόσον $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

Έχουμε $\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu} \to e$ (ως υπακολουθία της $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$).

$$\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{\nu} = \left(\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu}\right)^{1/2} \to e^{1/2}$$

$$\zeta_\nu = \left(1+\frac{1}{4\nu}\right)^{3\nu}$$

Έχουμε $\left(1+\frac{1}{4\nu}\right)^{4\nu} \to e$ (ως υπακολουθία της $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$

άρα $\zeta_\nu = \left(\left(1+\frac{1}{4\nu}\right)^{4\nu}\right)^{3/4} \to e^{3/4}$

$$y_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu!}\right)^{3\nu!}$$

$\left(1+\frac{1}{\nu!}\right)^{\nu!} \to e$ (ως υπακ. της $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ για $k_\nu = \nu!$

άρα $y_\nu \to e^3$

2) $a_\nu \geq 0$ $a_\nu \to \ell$ $\ell > 0$

Να δ.ο. $\sqrt[\nu]{a_\nu} \to 1$

Αποδ.

Εφόσον $a_\nu \to \ell$ εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_\nu - \ell| < \frac{\ell}{2} \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

$$\ell - \frac{\ell}{2} < a_\nu < \ell + \frac{\ell}{2}$$

$$\frac{\ell}{2} < a_\nu < \frac{3\ell}{2} \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

$$\Rightarrow \sqrt[\nu]{\frac{\ell}{2}} < \sqrt[\nu]{a_\nu} < \sqrt[\nu]{\frac{3\ell}{2}} \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

Εφόσον $\sqrt[\nu]{\frac{\ell}{2}} \to 1$ $\sqrt[\nu]{\frac{3\ell}{2}} \to 1$

απο Θ. 1606. ακολ. προκύπτει $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

Ερώτημα
Αν $a_n > 0 \ \forall n$ $a_n \to 0$ μπορώ να συμπεράνω ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$;

Απ
ΟΧΙ
π.χ. αν $a_n = \frac{1}{n^n} \to 0$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \to 0$$

3) (a_n) συγκλίνουσα
$\iff$ Οι (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο

Αποδ.
$\Rightarrow$ Αν $a_n \to \xi$
τότε $a_{2n} \to \xi$ και $a_{2n-1} \to \xi$ (ως υπακολουθίες)

$\Leftarrow$ Υποθέτουμε ότι $a_{2n} \to \xi$ και $a_{2n-1} \to \xi$
Θα δ.ο. $a_n \to \xi$
Έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον $a_{2n} \to \xi$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$
ώστε $|a_{2n} - \xi| < \varepsilon \ \forall n \geq n_1$ (1)
Εφόσον $a_{2n-1} \to \xi$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$
ώστε $|a_{2n-1} - \xi| < \varepsilon \ \forall n \geq n_2$ (2)

Θέτουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ Δείχνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - \xi| < \varepsilon$
Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$

α) Αν n άρτιος $n=2m$ $m \in \mathbb{N}$

Έχουμε $2m = n \geq n_0 \geq 2n_1$

άρα $m \geq n_1$

άρα από την (1)

$|a_{2m} - \xi| < \varepsilon$

δηλ. $|a_n - \xi| < \varepsilon$

β) Αν n περιττός

$n = 2m-1$ $m \in \mathbb{N}$

$2m-1 = n \geq n_0 \geq 2n_2 - 1$

$\Rightarrow m \geq n_2$

άρα από τη (2)

$|a_{2m-1} - \xi| < \varepsilon$ δηλ $|a_n - \xi| < \varepsilon$

4) Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία ώστε οι $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ $(a_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ να είναι συγκλίνουσες

Να δ.ο.

n (a_n) είναι συγκλίνουσα.

$b_n = a_{2n} \to x$	2	4	6	8	10	12	14
$\gamma_n = a_{2n-1} \to y$	1	3	5	7	9	11	13
$\delta_n = a_{3n} \to z$		3	6		9	12	

Εφόσον $b_n = a_{2n} \to x$ η υπακολ. που προκύπτει για $k_n = 3n$ $b_{3n} = a_{6n} \to x$

$\delta_n = a_{3n} \to z$ (για $\lambda_n = 2n$).

$\delta_{2n} = a_{6n} \to z$

Συνεπώς $x = z$

Δείξαμε ότι η (a_{6n}) είναι κοινή υπακολ. της (a_{2n}) και της (a_{3n})

Θα δ.ο η a_{6n-3} είναι κοινή υπακ. των (a_{2n-1}) και (a_{3n})

Για $k_n = 3n-1$

$\gamma_{3n-1} = a_{2(3n-1)-1} = a_{6n-3}$

$\gamma_n \to y \Rightarrow \gamma_{n-1} \to y \Rightarrow a_{6n-3} \to y$

$\delta_n = a_{3n} \to z$

για $\lambda_n = 2n-1$

$\delta_{2n-1} = a_{3(2n-1)} = a_{6n-3}$

$\delta_n \to z \Rightarrow a_{6n-3} \to z$

Άρα $y = z$

Επομένως

$x = y$

Έτσι $a_{2n} \to x$

$a_{2n-1} \to x \overset{\text{προηγ. ασκ.}}{\Rightarrow} a_n \to x$